EDUCATIONIS MOMENTUM

Vol. 11, n.° 1, 2025, pp. 91-130, ISSN (online): 2517-9853

https://doi.org/10.36901/em.v11i1.1723

Diseño de un entorno virtual interactivo para la formulación de conjeturas en el tema de sucesiones[1]

Design of an Interactive Virtual Environment for Formulating Conjectures on the Subject of Sequences

Juan Gabriel Herrera-Alva
Universidad Nacional Autónoma de México
gabalva@ciencias.unam.mx
https://orcid.org/0000-0002-1916-0587

Martha Leticia García-Rodríguez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología avanzada, Unidad Legaria, Instituto Politécnico Nacional
https://orcid.org/0000-0003-2435-1334

Recibido: 2025.06.13
Aprobado: 2025.09.18

1 La presente investigación se realizó con el apoyo financiero del Instituto Politécnico Nacional (IPN) y de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), México, en el marco del proyecto con registro N.° 20240074 en el IPN y del Programa de Estancias Posdoctorales por México de la SECIHTI (Beca: 170160).

Resumen

El presente estudio se centra en el diseño de una primera fase de un entorno virtual interactivo de trabajo (EVI), que tiene como objetivo facilitar la elaboración y formulación de conjeturas en el tema de sucesiones de números reales. Se procedió al diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) como marco didáctico para el EVI. La THA se constituye como un apoyo para lograr un aprendizaje planificado y activo en estudiantes de una carrera de ciencias. Integra seis ejemplos de sucesiones para aprender las nociones de sucesión monótona, sucesión acotada y sucesión convergente; orienta además la reflexión para elaborar conjeturas. El EVI cuenta con catorce tareas diseñadas a partir de los constructos teóricos de la imagen y la definición de un concepto. Se documentan las decisiones para el diseño del EVI y se presentan resultados de una prueba piloto, en donde se destaca la elaboración de al menos una conjetura en cuatro de los siete participantes.

Palabras clave: sucesiones, formulación de conjeturas, trayectorias hipotéticas de aprendizaje, definición e imagen de un concepto, entornos virtuales interactivos de trabajo

Abstract

This study focuses on the design of the first phase of an interactive virtual work environment (IVE) that aims to facilitate the development and formulation of conjectures on the topic of real number sequences. A hypothetical learning trajectory (HLT) was designed as a didactic framework for the IVE. The HLT is intended to support planned and active learning in science students. It includes six examples of sequences for learning the concepts of monotonic sequences, bounded sequences, and convergent sequences, and guides reflection for developing conjectures. The IVE has fourteen tasks designed based on the theoretical constructs of the image and the definition of a concept. The decisions for the design of the IVE are documented, and the results of a pilot test are presented, highlighting the development of at least one conjecture in four of the seven participants.

Keywords: sequences, formulation of conjectures, hypothetical learning trajectories, definition and image of a concept, interactive virtual work environment

Diseño de un entorno virtual interactivo para la formulación de conjeturas en el tema de sucesiones

En el aprendizaje del cálculo, la elaboración de conjeturas representa una práctica importante en el aula debido a que permite a los estudiantes imaginar y anticipar posibles resultados antes de recurrir a una demostración formal. Diversos autores subrayan este papel fundamental que tienen las conjeturas en las matemáticas (Alcock & Inglis, 2008; Bustos & Zubieta, 2015; Tall et al., 2012). Por ejemplo, Alcock e Inglis (2008) utilizaron conjeturas para analizar estrategias de razonamiento entre matemáticos expertos, su estudio se centró en el uso de ejemplos para razonar acerca de la validez de conjeturas generales. Bustos y Zubieta (2015) parten de una conjetura falsa y analizan el proceso de descubrimiento de conocimiento matemático para llegar a una conjetura verdadera. Tall et al. (2012) explicaron que la conjetura forma parte fundamental del ciclo de investigación matemática; en este ciclo, un investigador transita de la reflexión a la formulación de conjeturas y, por último, se buscan demostraciones formales de nuevos teoremas en un ciclo continuo de investigación y desarrollo matemático. Por su parte, Odifreddi (2006) expuso que los problemas y conjeturas han generado avances en el conocimiento matemático general, por ejemplo, los veintitrés problemas que Hilbert presentó en el congreso de París de 1900 guiaron el desarrollo de la matemática en la primera mitad del siglo XX.

De lo anterior se desprende que la conjetura juega un papel relevante en el proceso de formación de ideas, pues fomentan la exploración para refutar o validar declaraciones matemáticas. Es decir, conduce a la experimentación y al desarrollo de nuevo conocimiento.

La importancia de las conjeturas en la educación matemática

En el área de la educación matemática, diferentes autores han señalado el importante rol que tiene la elaboración de conjeturas en el aula; por ejemplo, Santos-Trigo (2024) destaca este proceso como un hábito matemático que debería promoverse. Explica que, mediante la *problematización*, se pueden desarrollar hábitos matemáticos como la formulación de conjeturas y la búsqueda de argumentos para sustentarlas, además de que se desarrolla el hábito de compartir soluciones y defender ideas. En relación con esto, Cai y Rott (2024) en su modelo de cuatro fases para la formulación de problemas

explican que, en la fase de *conexión*, los estudiantes identifican de forma consciente o inconsciente conexiones entre conceptos y conjeturas, y que, en la fase de *generación*, realizan una representación externa de las conexiones llevadas a cabo en la fase anterior, las mismas que pudieron ser mentales. Esto es importante porque se desarrollan ideas para proponer nuevos problemas.

Los señalamientos de estos autores dejan ver que, en el proceso de formulación de conjeturas, los estudiantes tienen un rol activo durante la experimentación, relacionan conceptos y establecen conexiones que los llevan a descubrir propiedades de los objetos matemáticos en juego.

Dificultades al formular, validar y refutar conjeturas

Solorzano-Movilla y De León-Zamora (2024), en una investigación relacionada con el pensamiento matemático avanzado, señalaron que los estudiantes presentan dificultades para plantear conjeturas al resolver problemas matemáticos, y que estas dificultades pueden estar relacionadas con factores como: (1) interpretaciones inadecuadas de los problemas, previas al planteamiento de conjeturas; (2) miedo al error, lo que podría limitar la creatividad y la disposición para explorar y conjeturar; (3) falta de revisión y verificación, lo que podría limitar la reflexión sobre las conjeturas planteadas. Sáenz (2001) reportó que, cuando los estudiantes elaboran una conjetura evidente, frecuentemente consideran que tiene el carácter de una demostración, piensan que reafirmarla es su demostración; lo que sugiere una dificultad en diferenciar entre conjeturar y demostrar. Por su parte, Stylianides y Stylianides (2018), en una investigación sobre el diseño de intervenciones en el aula dirigida a problemas que son clave y persistentes, expusieron que un par de problemas de esta naturaleza son: (1) los estudiantes tienden a pensar que un solo contraejemplo no es suficiente para refutar una conjetura o generalización matemática falsa, y (2) piensan que pocos casos confirmatorios son suficientes para establecer la verdad de una generalización matemática. En su artículo subrayan que esta segunda dificultad se relaciona con uno de los «hallazgos sólidos» de la investigación en la educación matemática, a saber: los estudiantes tienden a proporcionar ejemplos cuando se les pide que demuestren una afirmación universal. Además, esta práctica se sigue presentando a pesar de que los estudiantes hayan recibido instrucción explícita sobre la naturaleza de la demostración en matemáticas. En otra investigación, Hiebert y Carpenter (1992) indicaron que

la comprensión de los conceptos matemáticos depende de conectar diversas representaciones mentales asociadas al concepto. Se destaca esta noción de comprensión porque para la generación de conjeturas, de acuerdo con Tall et al. (2012), se transita de la reflexión a su formulación y es un puente para las demostraciones formales, esto implica conectar información observada con conocimientos previos, por lo que, si un estudiante no es capaz de conectar diversas representaciones mentales asociadas a los conceptos o información disponible, su capacidad para proponer conjeturas quedaría limitada.

Investigaciones previas

Alcock y Simpson (2009) recomiendan para el diseño de tareas o actividades docentes combinar dos enfoques, el sintáctico y el semántico. El primero se apoya en cómo se manipulan y estructuran los símbolos y definiciones formales; este enfoque se relaciona con la definición de un concepto (Tall & Vinner, 1981). El segundo busca entender el significado de los conceptos mediante la intuición y los ejemplos. Este enfoque se relaciona con la imagen de un concepto (Tall & Vinner, 1981). Al combinar ambos enfoques se transita conscientemente entre la imagen y la definición de un concepto, lo cual facilita su articulación, así se favorece identificar contraejemplos, generar conjeturas y luego someterlas a un análisis formal, por lo que se favorece la flexibilidad cognitiva y una comprensión más completa de los conceptos y métodos matemáticos.

También relacionado con el diseño de tareas, Sghaier y Vandebrouck (2018) realizaron una propuesta para ayudar a los estudiantes a explorar la continuidad de una función, considerando los constructos teóricos de Tall y Vinner (1981) de la imagen y la definición de un concepto. Diseñaron la herramienta TIC-Analyse, que estable una correspondencia entre dos ventanas, una con un punto de vista cinemático-dinámico (imagen del concepto) y otra desde un punto de vista aproximado-estático (definición del concepto). El propósito fue que los estudiantes incorporaran la definición de continuidad en su imagen preexistente, articulando la imagen y la definición de este concepto mediante actividades interactivas con la mediación del profesor. Como resultado de la intervención, los investigadores reportaron que algunos estudiantes fueron capaces de interactuar en torno a la definición de continuidad de manera espontánea con el profesor, cuando este la escribió en la pizarra. Y para él la herramienta favoreció esta interacción.

La integración de la tecnología en el diseño de actividades o tareas ha sido motivo de investigación, se han reportado avances para el mejoramiento de la enseñanza en matemáticas, por ejemplo, Komatsu y Jones (2019) desarrollaron un marco con tres principios de diseño para tareas en entornos de geometría dinámica que fomenta la refutación heurística, es decir, la revisión de conjeturas y demostraciones a través del descubrimiento de contraejemplos. Günster y Weigand (2020) ven la tecnología como un medio para mejorar la educación matemática. En su estudio proponen un marco teórico para el diseño de tareas en entornos digitales interactivos que promueven el pensamiento funcional. Advierten que el uso de la tecnología para el aprendizaje siempre debe estar dentro de un marco didáctico sólido. Por su parte, Dos Santos et al. (2024), en un estudio colaborativo entre docentes sobre el desarrollo de recursos de evaluación con retroalimentación automática para la formación en línea del aprendizaje de las matemáticas, reportaron una mejor calidad de los recursos creados y una mejora en la formación profesional. Los investigadores sugieren que la retroalimentación automática en el proceso de enseñanza-aprendizaje promueve el aprendizaje significativo y la autonomía del aprendizaje de los estudiantes. En este mismo sentido, existen autores que sostienen que herramientas digitales como GeoGebra, pizarras interactivas y tabletas pueden mejorar los métodos de enseñanza convencionales (De Vita et al., 2018; Duijzer et al., 2019; Günster & Weigand, 2020; Rogier Bos & Drijvers, 2025).

Por otra parte, existen investigaciones que advierten sobre posibles desventajas al incorporar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, Solar-Bezmalinovic (2024) propuso en su investigación cinco dimensiones para el diseño de situaciones de aprendizaje en un ambiente digital, a saber: diseño de tareas, ambiente digital interactivo, cápsulas de video, la retroalimentación y las evaluaciones. Sin embargo, reportó que la interacción entre los estudiantes y los docentes fue limitada. En este mismo sentido, López y Meneses (2025), en un estudio con profesores de ciencias, reportaron diversas dificultades al incorporar la tecnología digital; se destacan dificultades con el conocimiento tecnológico de los profesores, desajustes entre metas propuestas y el potencial de las actividades tecnológicas, poco interés y dificultades de los estudiantes con el uso de herramientas para interactuar con datos en tiempo real, reglas institucionales que prohíben el uso de celulares en el aula, etc. Concluyen que no basta con el dominio

disciplinar del profesor para integrar la tecnología de manera efectiva, se necesita de una formación profunda en tecnologías específicas y experiencia.

Propósito de la investigación

La investigación se dirige hacia una primera fase de diseño de un entorno virtual interactivo de aprendizaje (EVI) mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) siguiendo la propuesta de Simon (1995). Se recurre a una THA debido a que constituye un marco didáctico sólido para el proceso de aprendizaje planificado (un aprendizaje que es intencional y organizado, que sigue un plan diseñado con un objetivo, una secuencia de actividades, un punto de partida, un periodo definido y momentos de retroalimentación y verificación para la obtención del objetivo), cumpliendo así con la observación de Günster y Weigand (2020) de disponer de un sustento teórico al integrar la tecnología en una actividad de aprendizaje. De esta manera, el diseño del EVI busca promover un rol activo y la autonomía del estudiante, que de acuerdo con Rodríguez-González (2006) son características deseables para la enseñanza en el siglo XXI. Estas características buscan que los estudiantes sean capaces de controlar y evaluar su propio proceso de aprendizaje.

Por otra parte, atendiendo a la importancia de la conjetura en matemáticas y a las dificultades que manifiestan los estudiantes para formularlas, esta investigación tiene como objetivo documentar el diseño de un EVI para la formulación de conjeturas en estudiantes de una carrera de matemáticas en el tema de sucesiones. Para lograr este objetivo, el diseño de las tareas de la THA en el EVI retoma elementos teóricos desarrollados por Tall y Vinner (1981), a saber, la *imagen del concepto, la definición del concepto* y los modelos de interacción entre estos elementos teóricos (Vinner, 2002).

La investigación busca contestar la pregunta: ¿cuáles son las características esenciales de diseño que un EVI debe tener para orientar la reflexión de los estudiantes para elaborar conjeturas en el tema de sucesiones?

Marco teórico

La noción de conjetura

Se han identificado diferentes matices de la noción de conjetura, dependiendo del campo en que se utilice. En la educación matemática, Harel y Sowder

(1998) definen una conjetura desde el punto de vista del aprendiz, como una observación hecha por una persona que tiene dudas sobre su verdad. Esta noción es subjetiva, pues el grado de fe en una conjetura influirá en la dirección de la búsqueda de evidencia. Es decir, si hay alta fe en la verdad de la conjetura, el aprendiz buscará pruebas que la confirmen. Si la fe en la conjetura es baja, buscará contraejemplos para refutarla. En esta investigación se adopta la perspectiva de Harel y Sowder (1998) para referirse a la noción de conjetura, por considerarla afín en los contextos de enseñanza.

Trayectoria hipotética de aprendizaje

Según Simon (1995) una THA es un constructo teórico y práctico que puede funcionar como marco didáctico para la planeación de tareas. Se compone de tres elementos principales: (1) el objetivo de aprendizaje para los estudiantes, (2) las tareas matemáticas que se utilizarán para promover el aprendizaje, y (3) las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Para el diseño de una THA, el profesor previamente reflexiona sobre el conocimiento previo del estudiante y la selección adecuada de tareas para generar hipótesis informadas sobre cómo los estudiantes podrían procesar nuevos conceptos matemáticos para llegar al objetivo de aprendizaje establecido.

La definición y la imagen de un concepto

De acuerdo con Simon (1995) las tareas de la THA se diseñan para favorecer el aprendizaje, para lograr esto, en esta investigación se adoptan los constructos de Tall y Vinner (1981) de la definición y la imagen de un concepto. El primero se refiere a las palabras que se utilizan para formalizar un concepto; el segundo, a toda la estructura cognitiva asociada a un concepto, incluye diversos atributos o representaciones, por ejemplo, imágenes mentales, propiedades visuales asociadas al concepto como gráficos o símbolos y procesos asociados. La imagen del concepto se forma a partir de las experiencias previas de un estudiante relacionadas con los conceptos, es dinámica, es decir, cambia conforme el individuo va madurando su entendimiento al enfrentarse a nuevas situaciones y estímulos. Otro elemento que se utilizó para el diseño de las tareas fueron los diagramas o escenarios de interacción entre la definición y la imagen del concepto propuestos por Vinner (1983).

Las tareas de la THA están diseñadas con adaptaciones de esos modelos que a continuación se describen de manera breve.

Interacción entre la imagen y la definición de un concepto

Para formar un concepto, Vinner (1983) propuso diagramas que representan distintos escenarios de interacción entre la imagen y la definición del concepto. Supuso que, para cada concepto, existían dos celdas o células diferentes en la estructura cognitiva de un individuo, una para la definición y otra para la imagen del concepto, estas celdas pueden interactuar entre sí o estar vacías.

Vinner explicó que para formar un concepto existe una etapa de rendimiento o ejecución, la cual tiene que ver con la realización de una tarea cognitiva que puede ser de identificación, de construcción o de otra naturaleza. Esta etapa de ejecución puede tener diferentes escenarios, por ejemplo, cuando se ejecuta una tarea (T) se puede activar la definición del concepto (DC), y de ahí interactuar con la imagen del concepto (IC), lo que produce una respuesta (R) o comportamiento intelectual ($T \rightarrow DC \leftrightarrow IC \rightarrow R$). En este caso, la imagen del concepto se modifica al interactuar de manera bidireccional con la definición durante la realización de la tarea. Otra situación ocurre cuando a partir de una imagen del concepto se recurre a la definición de manera unidireccional ($T \rightarrow IC \rightarrow DC \rightarrow R$). También puede suceder que una definición sea demasiado compleja y no evoque una imagen del concepto ($T \rightarrow DC \rightarrow R$).

Metodología

Objetivo de aprendizaje

El objetivo de la asignatura de cálculo diferencial e integral, en una carrera de ciencias, hace énfasis en la presentación de los fundamentos del cálculo y en el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas. Por ejemplo, según lo establece la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (2005) en su plan de estudios, uno de los temas a aprender es el de sucesiones de números reales y sus características. Como parte de este conocimiento, un estudiante deberá comprender o darle sentido al teorema: *toda sucesión creciente y acotada superiormente converge,* que es uno de los teoremas principales del curso. Para este propósito se diseñaron tareas de

aprendizaje utilizando elementos propuestos por Tall y Vinner (1981) y Vinner (1983), para desarrollar una comprensión intuitiva de los conceptos de sucesión monótona (creciente o decreciente), sucesión acotada y sucesión convergente, y a partir de esto elaborar conjeturas, que de acuerdo con Tall et al. (2012) pueden servir como puente a la formalización.

Conocimiento previo requerido

Conocimiento de la definición de sucesión como una función real con dominio en el conjunto de los números naturales. Además, conocer algunos ejemplos de sucesiones en su representación geométrica.

Las tareas matemáticas para promover el aprendizaje

La THA contiene catorce tareas para alcanzar el objetivo de aprendizaje. Se diseñaron en formato digital presentadas en un formulario de Google (Herrera & García, 2025). Las tareas se dividieron en cuatro bloques, cada bloque se presenta como un escenario interactivo que atiende a un concepto o tema. Algunas tareas consisten en preguntas de opción múltiple, otras de selección, y otras contienen preguntas abiertas.

Tarea 0

En la tarea 0 se incluyó un video del comportamiento de seis sucesiones mediante *applets* en GeoGebra. Para facilitar su manejo cada sucesión fue etiquetada con una letra A, B, C, D, E y F. El término general de cada sucesión está dado por:

A: $a_n = \frac{n-1}{n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

B: $b_n = \frac{n(-1)^n}{4}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

C: $c_n = (-1)^n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

D: $d_n = \frac{1-n}{n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

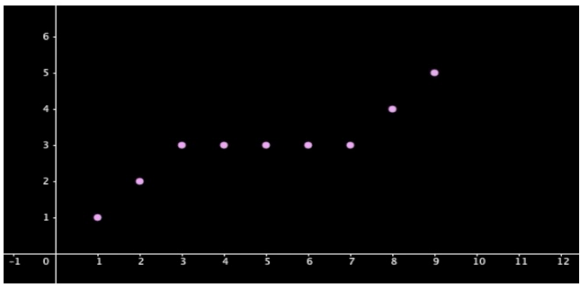
Debido a la dificultad del término general de la sucesión E, se presentan los primeros veintiún términos de la sucesión:

E: 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 9, …

La figura 1 muestra una representación geométrica de esta sucesión en el EVI hasta n = 9.

Figura 1

Representación geométrica de la sucesión E en el EVI



F: $f_n = \frac{(-1)^n}{n}$ para $n = 1, 2, 3, ...$

La tarea 0 es común a todos los bloques, fue un apoyo visual para que los estudiantes respondieran las tareas.

Tareas matemáticas: bloques 1 y 2

Las tareas de los bloques 1 y 2 se relacionan con los temas de sucesión monótona y de sucesión acotada (tabla 1).

Tabla 1
Monotonía de una sucesión y sucesión acotada (bloques 1 y 2)

Tarea	Descripción de la tarea
1	Se presenta una tabla para seleccionar la opción que representa el comportamiento creciente, decreciente o ninguno de estos para cada sucesión de la tarea 0.
2	Se presentan las características de cinco sucesiones, para elegir las que corresponden a sucesiones crecientes o decrecientes. Se agrega una opción en blanco para escribir características no incluidas en las opciones dadas. (i) Cada elemento de una sucesión decreciente está más arriba o a lo sumo a la misma altura que su sucesor inmediato. (ii) Una sucesión constante no puede ser creciente ni decreciente. (iii) Cada elemento de una sucesión creciente está más abajo o a lo sumo a la misma altura que su sucesor inmediato. (iv) Una sucesión que oscila entre dos valores puede ser creciente o decreciente. (v) Existen sucesiones que no son crecientes ni decrecientes. (vi) Otra.
3 y 4	Se presentan cuatro definiciones para elegir la que corresponda a la de una sucesión creciente o decreciente. (i) $x_n \leq x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. (ii) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq x_{n+1}$. (iii) $x_n \geq x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. (iv) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq x_{n+1}$.

Se solicita relacionar la definición que eligieron en las preguntas 3 y 4 con las sucesiones de la tarea 0. Se pide justificar las respuestas.

5

(i) Sucesiones A y B.

(ii) Sucesiones A y D.

(iii) Sucesiones A y E.

(iv) Sucesiones B y E.

Este bloque repite las características de las tareas del bloque anterior, con los conceptos de sucesión acotada inferiormente y sucesión acotada superiormente. Se ejemplifica el bloque presentando algunas características relacionadas con el concepto de sucesión acotada superiormente y su definición.

Características de cota superior:

(i) Una cota superior de un conjunto es un número muy grande.

(ii) Una cota superior de un conjunto es un número positivo.

(iii) Una cota superior de un conjunto A es un número que cumple ser mayor o igual que todos los elementos de A.

6-10

(iv) Un conjunto infinito no puede estar acotado.

(v) Si un conjunto tiene una cota superior, entonces tiene una infinidad de cotas superiores.

(vi) Otra.

Opciones para la definición de cota superior:

(i) Para toda $M \in \mathbb{R}$, se cumple $x_n \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$.

(iv) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

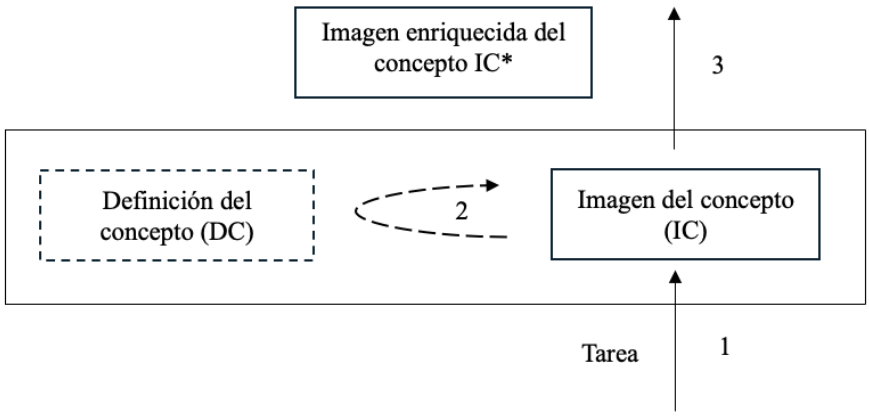
Tareas para orientar hacia la definición del concepto

Las tareas 1, 2, 6 y 7 introducen de forma intuitiva los conceptos de monotonía y sucesión acotada, y utilizan como apoyo la tarea 0. En la figura 2

se representa la forma en que las tareas orientan para evocar, reorganizar y aportar a lo que el estudiante conoce sobre un concepto —imagen del concepto— (1). Se espera que las consignas lo orienten hacia la definición del concepto (2), lo que produce una respuesta (3), una imagen del concepto enriquecida (IC*). Es decir, de acuerdo con Tall y Vinner (1981), IC* es la nueva estructura cognitiva del estudiante que resulta de interactuar con una tarea. Este proceso se asume para los conceptos de monotonía y de sucesión acotada (bloques 1 y 2).

Figura 2

*Escenario 1: T → IC → DC → IC**



Nota. Adaptado de «Concept definition, concept image and the notion of function» (p. 296), por S. Vinner, 1983, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3). La celda punteada DC representa un acercamiento potencial a la definición del concepto.

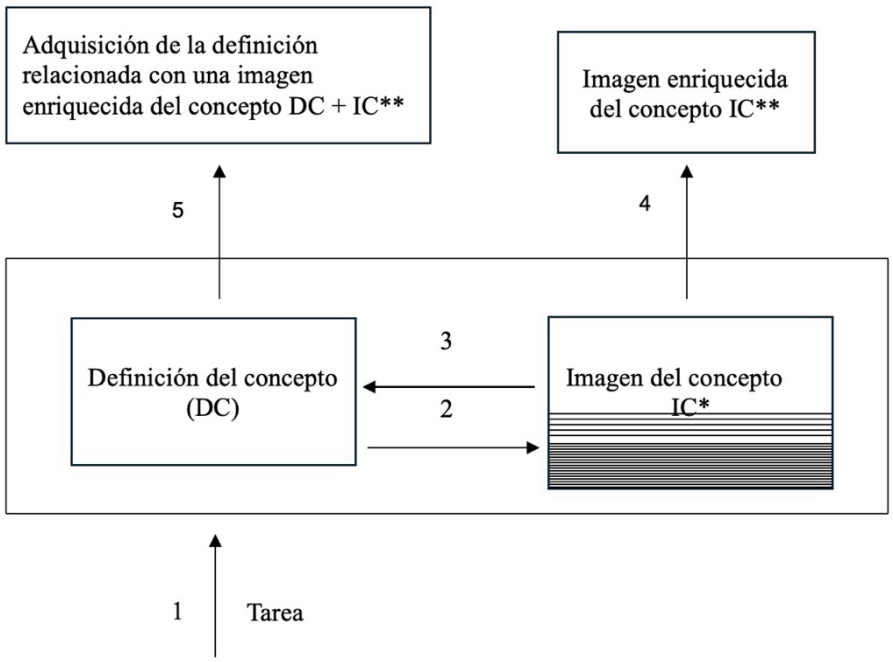
Tareas para formalizar conceptos

Las tareas 3 y 4 de monotonía, 8 y 9 de sucesión acotada, son de formalización, esto se representa en la figura 3. Esta tarea inicia con definiciones (1). Se orienta a los estudiantes para que asocien la imagen enriquecida del concepto IC* (imagen del concepto) que se formó en las tareas 1, 2, 6 y 7, con la definición del concepto que se menciona en la consigna de las tareas 3, 4, 8 y 9. En esta tarea los estudiantes realizan un proceso de reflexión de

ida (2) y regreso (3), lo que conducirá a una nueva imagen enriquecida IC** (4). Si la respuesta es adecuada, es decir, comprende la definición, la nueva estructura cognitiva del estudiante (Tall & Vinner, 1981) queda representada por DC + IC** (5). Este proceso se asume para la formalización de los conceptos de monotonía y de sucesión acotada (bloques 1 y 2).

Figura 3

Escenario T → DC ↔ IC → IC** o DC + IC***



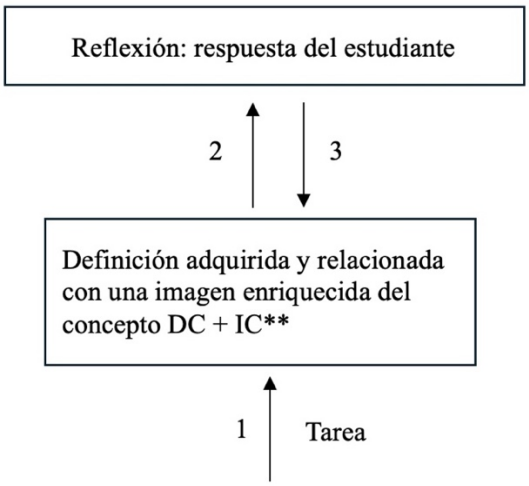
Nota. Adaptado de «Concept definition, concept image and the notion of function» (p. 295), por S. Vinner, 1983, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3).

Tareas para reflexionar sobre la definición del concepto y la imagen enriquecida del concepto

El proceso de reflexión se representa en la figura 4. Inicia con las tareas 5 y 10 (1). A partir de la definición de los conceptos de monotonía y sucesión

acotada presentados en las tareas 3, 4, 8 y 9, y de la imagen enriquecida del concepto DC + IC** (2), los estudiantes relacionan las sucesiones de la tarea 0 y confirman o refutan sus respuestas a las tareas 1, 2, 6 y 7 (3).

Figura 4
Escenario $T \rightarrow DC + IC^{**} \leftrightarrow R$



Nota. Adaptado de «Concept definition, concept image and the notion of function» (p. 295), por S. Vinner, 1983, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3).

Tareas matemáticas: bloque 3

Este bloque se relaciona con el tema de sucesión convergente (tabla 2).

Tabla 2

Bloque 3. Sucesión convergente

Tarea	Descripción de la tarea
11	Se presenta una aproximación a la definición de convergencia, se proporciona una tabla para seleccionar las opciones que correspondan a las sucesiones convergentes de la tarea 0.
12	Se presentan cuatro opciones para elegir las que corresponden a características de sucesiones convergentes. Se solicita justificar las respuestas. (i) Si una sucesión converge, entonces la sucesión se acerca tanto como se desee a un valor L, pero nunca llega a él (no lo «toca»). (ii) Una sucesión converge a un número L, si a partir de algún momento la sucesión se puede acercar a L tanto como se quiera. (iii) Si una sucesión converge a L, entonces la sucesión no puede acercarse tanto como se quiera a otro valor diferente a L. (iv) La sucesión $(1)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión constante, por lo que sí alcanza su límite.

Tareas para enriquecer la imagen del concepto a partir de la definición intuitiva de convergencia

Se introduce una aproximación a la definición[1] de sucesión convergente al inicio del bloque en el EVI.

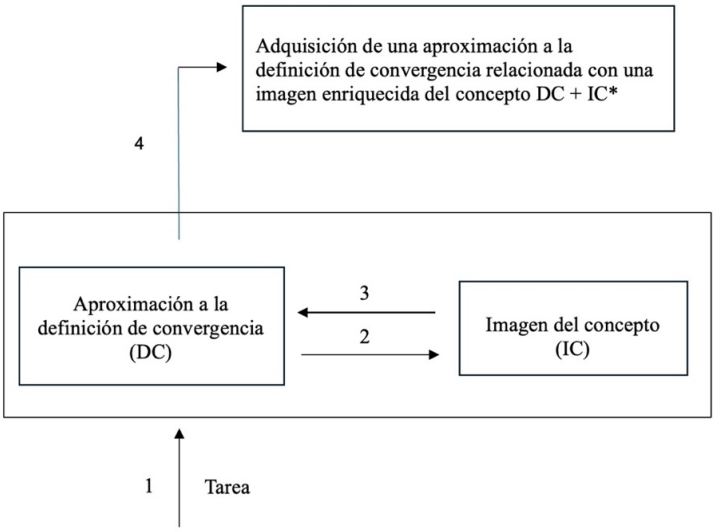
1 Se considera como aproximación a la definición de convergencia de una sucesión la expuesta por Rivera (2014), la cual enuncia que, a partir de algún momento la sucesión puede acercarse a un valor L«tanto como se quiera». Es decir, a partir de algún N todos los sucesores x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, ... de la sucesión están tan cerca como se quiera de L. También se recurre, si es necesario, al cálculo del límite a infinito de las sucesiones de la tarea 0 para determinar dicha convergencia.

Se recurre a ello por dos razones: la primera debida a la alta carga cognitiva que tiene este concepto (Roh, 2010); la segunda debido a que, según Roh (2008), la comprensión de la definición de límite de una sucesión requiere previamente de imágenes mentales coherentes con el concepto. Por lo que es recomendable promover en los estudiantes imágenes mentales del comportamiento dinámico, que tiene el concepto de límite antes de la comprensión de su definición.

La interacción entre la definición del concepto y la imagen del concepto se describe en el esquema de la figura 5. Se solicita que clasifiquen a las sucesiones de la tarea 0 como convergentes o no convergentes (1); los estudiantes recurren a la aproximación proporcionada al inicio del bloque y a la imagen del concepto que cada uno tiene de convergencia de una sucesión (2) y (3). De esta forma logran una imagen enriquecida de este (IC*) y una aproximación a la definición proporcionada al inicio del bloque 3 del EVI (4).

Figura 5

*Escenario T DC IC DC + IC**



Nota. Adaptado de «Concept definition, concept image and the notion of function» (p. 295), por S. Vinner, 1983, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3).

Tareas matemáticas: bloque 4

Este bloque se orienta a la formulación de conjeturas (tabla 3).

Tabla 3

Bloque 4. Conjeturas propuestas y formuladas por los estudiantes

Tarea	Descripción de la tarea
13	Se presenta una tabla con cinco conjeturas para decidir si son falsas o si pueden ser verdaderas. Se solicita justificar las respuestas. (i) Si una sucesión oscila alrededor de un valor, entonces no puede ser convergente. (ii) Si una sucesión es creciente, entonces no puede estar acotada. (iii) Algunas sucesiones que oscilan alrededor de un valor pueden ser convergentes. (iv) Si una sucesión no converge, entonces no está acotada. (v) Si una sucesión no está acotada, entonces es creciente o decreciente.
14	Se solicita organizar la información estudiada en las tareas 0-13, a partir de esto formular al menos dos conjeturas. Se proporcionan hipótesis y conclusiones para formular las conjeturas. Se agrega una opción para que formulen hipótesis y conclusiones no contempladas.

Este bloque es la parte central del diseño, en él se proponen dos tareas. Se espera que en estas tareas la imagen enriquecida de los conceptos y la aproximación a las definiciones de sucesión monótona, acotada y convergente en los estudiantes interactúen (Vinner, 2002), para identificar si una conjetura puede ser válida o no (tarea 13) y para formular conjeturas propias (tarea 14).

Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes

Bloque 1. Monotonía

En las tareas 1 y 2 se espera que los estudiantes observen que la sucesión A crece indefinidamente y que cada vez crece menos. De manera similar, que la sucesión D decrece indefinidamente. Con esto los estudiantes podrían construir una idea de monotonía (creciente o decreciente) de una sucesión y deducir que existen sucesiones que no son crecientes ni decrecientes.

Respecto a las tareas 3 y 4 de formalización los estudiantes identificarían que el cuantificador universal, junto con la relación de orden, determina la monotonía de una sucesión.

En la tarea 5 de verificación se espera que relacionen el comportamiento observado de las sucesiones en la tarea 0 con las definiciones de monotonía, en particular el de la sucesión E, es decir, que cuando justifiquen sus respuestas se reconozca que, para ellos, la expresión $x_n = x_{n+1}$ implica que $x_n \leq x_{n+1}$ y $x_n \geq x_{n+1}$. Es decir, que las sucesiones constantes pueden considerarse como crecientes y decrecientes a la vez, ya que los signos $\leq$ y $\geq$ llevan implícito una disyunción. Un razonamiento similar los conduciría a deducir el regreso de esta implicación.

Bloque 2. Sucesión acotada

En las tareas 6 y 7 se espera que los estudiantes observen que los valores de la sucesión C están entre -1 y 1. De forma análoga que, los valores de la sucesión F están entre -1 y $\frac{1}{2}$. Con esto se pretende que construyan la idea de cota superior e inferior de una sucesión.

Respecto a las tareas 8 y 9 de formalización, los estudiantes identificarían que ambos cuantificadores, el existencial para la cota y el universal para los elementos de la sucesión, junto con la relación de orden, definen una sucesión acotada superior o inferiormente.

Respecto a la tarea 10 de verificación se espera que los estudiantes reflexionen si una sucesión creciente como la sucesión A pueda estar acotada superiormente. De forma análoga, se espera que reflexionen en la existencia de

una cota inferior en el caso de una sucesión decreciente como D. Algunos estudiantes sustituirían valores en los términos generales de A y D, de esta manera, reconocerían de forma intuitiva a 1 como una cota superior de A y a -1 como una cota inferior de D. Otros estudiantes resolverían directamente las desigualdades, $\frac{n-1}{n} \leq 1$ y $\frac{1-n}{n} \geq -1$, lo que demuestra que las sucesiones A y D están acotadas superior e inferiormente, respectivamente.

Bloque 3. Sucesión convergente

Respecto a la tarea 11, los estudiantes con apoyo de la tarea 0 y la definición informal de convergencia o el cálculo del límite, determinarían a las sucesiones A, D y F como sucesiones convergentes.

Deducirían que, en el caso de la sucesión A, su límite coincide con la cota superior 1, identificada en la pregunta 10. Similarmente, identificarían que el límite de la sucesión D coincide con la cota inferior -1. Observarían que la sucesión F tiene límite 0 y que este valor es diferente tanto a la cota superior $\frac{1}{2}$ como a la cota inferior -1. Reconocerían que las nociones de cota superior y cota inferior son diferentes a la noción de límite. Además, deducirían que las sucesiones convergentes están acotadas.

Respecto a la tarea 12 relacionarían el inciso (i) con el ejemplo de la sucesión constante del inciso (iv), para deducir que una sucesión puede o no alcanzar su límite.

Apoyados nuevamente de la idea intuitiva de sucesión convergente, reconocerían que las sucesiones convergentes tienen un límite único.

De la reflexión en las preguntas 1, 2, 6, 7 y 11 deducirían que las sucesiones A y D son monótonas, acotadas y convergentes.

Bloque 4. Formulación de conjeturas

En la tarea 13 utilizarían las sucesiones de la tarea 0 para refutar cuatro de las cinco conjeturas, a saber: la sucesión F para la conjetura (i), la sucesión A para la conjetura (ii), la C para la conjetura (iv) y la B para la conjetura (v).

Respecto a la tarea 14 los estudiantes elaborarían un cuadro o tabla similar a la tabla 4, que les permitiera organizar la información trabajada en las tareas de la THA.

Tabla 4
Tabla o cuadro para organizar la información de la THA

	Propiedad					
Sucesión	Creciente	Decreciente	Acotada superiormente	Acotada inferiormente	Oscila	Converge
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$						

Los estudiantes elaborarían otro cuadro para ordenar sus hipótesis y conclusiones (tabla 5). A partir de ello harían relaciones, formularían conjeturas o las refutarían con la información recabada.

Tabla 5
Tabla para la formulación y refutación de conjeturas

Hipótesis		Conclusión		Ejemplos	Contraejemplo	Conjetura
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$	está acotada	$(x_n)_{n=1}^{\infty}$	es convergente		Sucesión C	Refutada
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$	es convergente	$(x_n)_{n=1}^{\infty}$	está acotada	Sucesiones A, D y F	–	Formulada
Etc.						

Con la información organizada se esperaría que formularan al menos dos conjeturas, por ejemplo:

- Si una sucesión es convergente, entonces está acotada.
- Si una sucesión es creciente y acotada superiormente, entonces converge.

Instrumentos de recolección de datos

- Notas realizadas por los investigadores.
- Hojas de trabajo para formulación de conjeturas.
- Entorno Virtual Interactivo (EVI).

Pilotaje del EVI

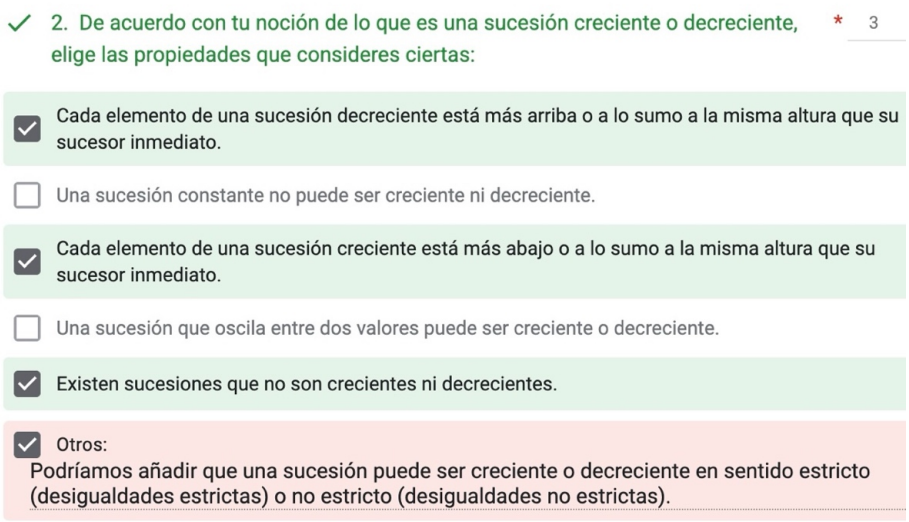
Se llevó a cabo una prueba piloto con un grupo de siete estudiantes de rendimiento promedio, inscritos en un curso de cálculo en una carrera de matemáticas, que aceptaron trabajar en las tareas de forma voluntaria durante 120 minutos. Los estudiantes hicieron uso de teléfono celular, tableta o computadora para acceder a las tareas del EVI, puede ser consultado en Herrera y García (2025).

Análisis del funcionamiento del EVI en el bloque de sucesión monótona y conjeturas obtenidas

Dado que el objetivo de esta investigación es documentar el diseño del EVI, se presenta como muestra un breve análisis del trabajo realizado por el estudiante que llamaremos *E1* durante las tareas 1, 2, 3 y 4 relacionadas con el concepto de sucesión monótona. La elección de *E1* se debió a que, al inicio de las tareas, brindó información de su imagen del concepto de sucesión monótona (figura 6). También se presenta evidencia de las conjeturas formuladas por los demás estudiantes.

Figura 6

Imagen previa de E1 del concepto de sucesión monótona



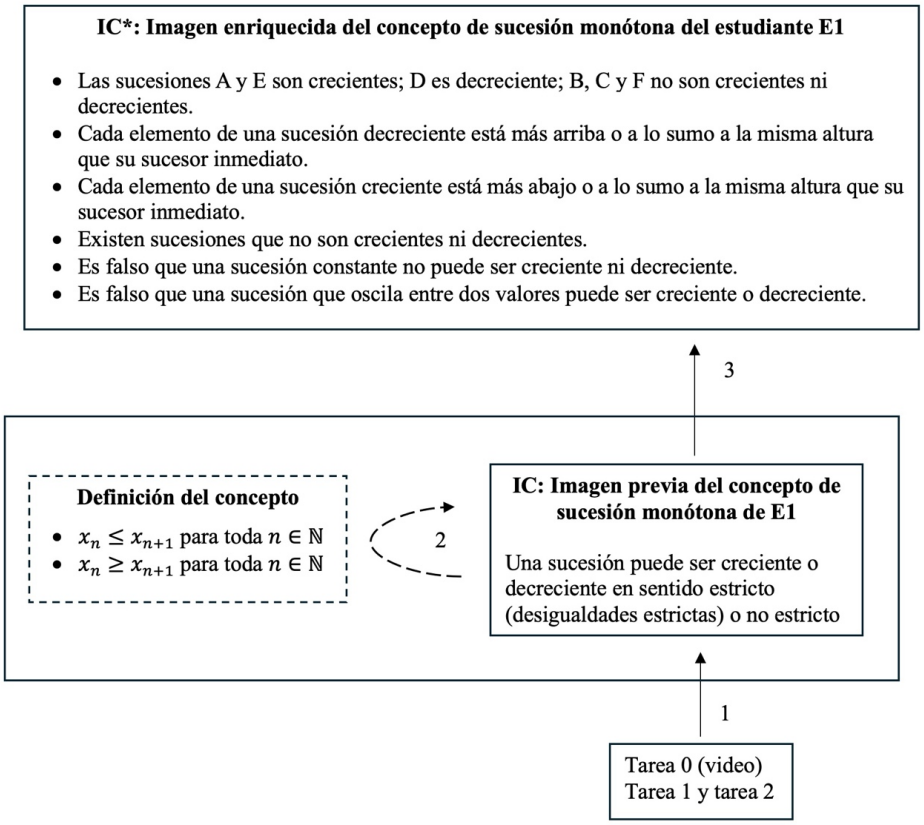
Nota. Se toma como imagen previa del concepto de sucesión monótona de *E1* la última de la lista.

Desarrollo de la imagen del concepto de E1.

La figura 7 ejemplifica la interacción de *E1* con las tareas 0, 1 y 2 a partir de su imagen previa del concepto de sucesión monótona (1). La visualización dinámica de las sucesiones permitió a *E1* reconocer a las sucesiones A y E como crecientes, a la sucesión D como decreciente, y a B, C y F como sucesiones que no cumplen la definición. Este reconocimiento formó parte de su imagen previa. Las consignas de las tareas como «cada elemento de una sucesión creciente está más abajo o a lo sumo a la misma altura que su sucesor inmediato», y las observaciones específicas como «es falso que una sucesión que oscila entre dos valores puede ser creciente o decreciente», también enriquecieron la imagen previa del concepto y lo orientaron hacia la definición del concepto (2), lo que dio lugar a una imagen enriquecida del concepto (3).

Figura 7

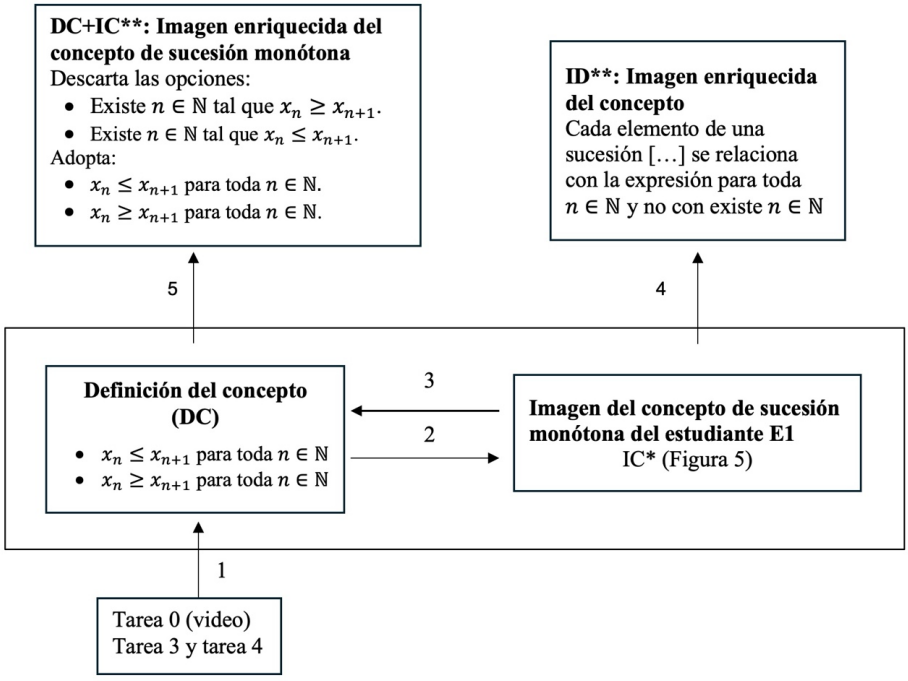
Imagen enriquecida del concepto de sucesión monótona de E1



La figura 8 muestra cómo las tareas 3 y 4, apoyadas de la tarea 0, promovieron un acercamiento hacia la definición del concepto (1). *E1* utiliza la imagen enriquecida del concepto IC* para dar sentido a las definiciones que se le presentan en las tareas 3 y 4, flechas (2) y (3). Al parecer utilizó la consigna «cada elemento de una sucesión creciente está más abajo o a lo sumo a la misma altura que su sucesor inmediato» de la tarea 2. Asoció el cuantificador universal «cada elemento» de la consigna con la expresión «para toda $n \in \mathbb{N}$ » en las definiciones, flechas (4) y (5).

Figura 8

Formalización del concepto de sucesión monótona del estudiante E1



Respecto a la elaboración de conjeturas, los estudiantes realizaron quince conjeturas (tabla 6). Estas fueron clasificadas en conjeturas válidas y no válidas, las primeras se refieren a conocimientos aceptados por la comunidad de matemáticos, en algunos casos con poca diferencia en relación con lo que se encuentra en los libros de cálculo. Las segundas se refieren a las conjeturas que pueden ser refutadas con un contraejemplo o tienen una redacción errónea.

Tabla 6

Clasificación de conjeturas formuladas por los participantes

N.º	Conjeturas válidas	Conjeturas no válidas
1	Si una sucesión monótona converge, entonces está acotada.	Si una sucesión es acotada, entonces converge a la cota.
2	Si una sucesión es creciente y acotada superiormente, entonces converge.	Una sucesión converge a l si y solo si $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(n)$ nunca llega a tocar a l, pero cada vez se acerca más.
3	Si una sucesión es creciente y convergente a donde converge es la cota superior de la sucesión.	Una función está acotada si y solo si $\overline{\exists M \in \mathbb{R}}$ tal que $\forall\, n \in Dom$ se tiene que $M \geq n$ o $M \leq n$. .
4	Si una sucesión es creciente y acotada, entonces converge a la cota.	Una función oscila a una x si $f(m)$ p.a $m \in Dom$ está cerca o es x.
5	Si la sucesión converge, entonces podemos decir que está acotada.	Para todas funciones que oscilan a un valor x. y están acotadas superior e inferiormente.
6	Si una sucesión está acotada, no significa que converge.	Para todas sucesiones que oscilan a un valor x, no tienen límite.
7	Una función es creciente si y solo si tenemos a x_1 y x_2 en el dominio y $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$..	
8	Existen sucesiones que son crecientes y a su vez tienen un límite.	

9	Existen funciones que son crecientes y a su vez están acotadas.

Discusión y conclusiones

El diseño del EVI a través de una THA fue planeado para que los estudiantes formularan al menos dos conjeturas, por ejemplo:

- Si una sucesión es convergente, entonces está acotada.
- Si una sucesión es creciente y está acotada superiormente, entonces converge.

Los datos muestran que el diseño cumplió el objetivo previsto, más aún, condujo a la elaboración y formulación de quince conjeturas, de las cuales solo seis no fueron correctas, de acuerdo con el conocimiento oficial. Se resalta la diversidad en la formulación de conjeturas de los estudiantes.

Se aprecia una mezcla entre las notaciones de sucesión y función, posiblemente porque se había definido a una sucesión —conocimiento previo— como una función real con dominio en el conjunto de los números naturales.

Las formulaciones válidas de acuerdo con el conocimiento oficial se clasificaron en cuatro tipos:

1. Formulaciones generales no refinadas. Es decir, formulaciones verdaderas, que contienen hipótesis de las que se podrían prescindir sin afectar su validez. Por ejemplo, la conjetura 1 combina monotonía y convergencia para afirmar que la sucesión está acotada. Aquí, la monotonía no es necesaria.

2. Formulación de definiciones inferidas como conjeturas. Los estudiantes interpretaron como conjeturas algunas definiciones que consideraron correctas. Por ejemplo, en la formulación 7, el concepto de sucesión creciente, representado como función, se dedujo y se interpretó como una conjetura.

3. Formulaciones deducidas mediante un ejemplo o un contraejemplo. Como en la 6, un estudiante escribió: «si una sucesión está acotada, no significa que converge»; o la 8, en la que otro estudiante señaló, «existen sucesiones que son crecientes y a su vez tienen un límite».

4. Formulaciones generales precisas. Los estudiantes formularon de manera correcta hipótesis, sin condiciones innecesarias para la conclusión de una conjetura. Por ejemplo, la formulación 2, «si una sucesión es creciente y acotada superiormente, entonces converge»; y la 5, «si la sucesión converge, entonces podemos decir que está acotada».

Respecto a la pregunta de investigación: ¿cuáles son las características esenciales de diseño que un EVI debe tener para orientar la reflexión de los estudiantes para elaborar conjeturas en el tema de sucesiones? Con base en los datos del pilotaje se puede evidenciar que este diseño didáctico, en su primera fase de desarrollo, ofrece ideas funcionales para abordar conceptos, identificar relaciones, y a partir de esto elaborar y refutar conjeturas en el tema de sucesiones de números reales. Las características que se consideran esenciales en este diseño son:

- Adopción de la THA como marco didáctico en el EVI (Günster & Weigand, 2020).

- Diseño de tareas que integran la THA apoyadas en los constructos de la imagen y la definición de un concepto de Tall y Vinner (1981) y la interacción entre estos elementos (Vinner, 2002).

- Organización del EVI mediante bloques de temas y niveles intuitivo-formales para abordar las tareas.

- Incorporación de applets para representar visual y dinámicamente las sucesiones estudiadas.

- Reproducción de los applets mediante video para desarrollar cada bloque de tareas.

- Indicación en cada bloque de regresar a la tarea 0, para reevaluar y reorientar sus reflexiones de ser necesario.

Algunas de las implicaciones prácticas del diseño son:

1. El uso de ejemplos y contraejemplos de sucesiones representadas mediante applets. De acuerdo con los datos obtenidos en la prueba piloto, el diseño del EVI favoreció en los estudiantes la visualización de comportamientos de las sucesiones y el enriquecimiento de las imágenes de los conceptos, promoviendo una comprensión intuitiva de conceptos en el tema de sucesiones. Por ejemplo, la forma de percibir una sucesión acotada superiormente o una sucesión monótona o una convergente. Esto coincide con lo reportado por Roh (2008), sobre fomentar el desarrollo de imágenes mentales antes de formalizar conceptos.

2. La promoción de hábitos matemáticos deseables. El diseño del EVI involucró a los estudiantes en una práctica de indagación, expresada por medio de preguntas que los estudiantes se plantean y los conducen a profundizar en el significado de conceptos y sus relaciones o conexiones con otros, para elaborar las conjeturas.

3. Mayor alcance de un aprendizaje autónomo. Este tipo de innovaciones didácticas, al ser en línea y estar diseñadas mediante una THA orientan al estudiante en su proceso de aprendizaje (un aprendizaje planificado).

La información recabada permite destacar algunas áreas de oportunidad en el diseño de las tareas que forman parte del EVI, las mismas que pueden ser aprovechadas en estudios futuros por investigadores y docentes interesados en el diseño de tareas planificadas en entornos virtuales interactivos:

1. Agregar evaluación y retroalimentación por cada bloque de tareas. Si bien el presente diseño cuenta con evaluación y retroalimentación al finalizar todas las tareas de la THA, tres de los siete estudiantes no lograron formular ninguna conjetura, por lo que es oportuno, como lo indican Dos Santos et al. (2024), agregar retroalimentación automática e inmediata en cada tarea. Esta decisión podría propiciar un alcance mayor en los estudiantes de un aprendizaje significativo y autónomo.

2. La decisión anterior conduciría a un cambio en la elección de la herramienta digital para el diseño de los cuestionarios, que permita la evaluación y retroalimentación por segmentos o por pregunta si es necesario.

3. Sistematizar la información o conocimiento adquirido. En el diseño del proceso hipotético de aprendizaje se esperaba que los estudiantes realizaran un cuadro o tabla que les permitiera sistematizar la información obtenida durante las tareas de la THA. Sin embargo, ningún estudiante siguió este camino, y tres de los siete estudiantes no lograron elaborar ninguna conjetura. Por esto se recomienda agregar una tarea en el bloque 4 con una tabla diseñada para ser completada con la información que el estudiante logre relacionar.

4. Realizar un análisis detallado del proceso de aprendizaje de los participantes en cada fase de implementación que permita refinar y validar el diseño del EVI.

5. Del punto anterior y debido a la naturaleza práctica y evolutiva de la propuesta, sería pertinente desarrollar una metodología de EVI.

Estas implicaciones ayudarían para superar las limitaciones detectadas en el diseño de las tareas de la THA y las limitaciones técnicas del EVI.

Referencias

Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 111-129. http://www.jstor.org/stable/40284538

Alcock, L., & Simpson, A. (2009). *Ideas from Mathematics Education: An Introduction for Mathematicians*. Loughborough University. https://hdl.handle.net/2134/8846

Bustos, A. S., & Zubieta, G. (2015). Descubrimiento de conocimiento matemático mediante la reformulación de conjeturas falsas en un ambiente de pruebas y refutaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(3), pp. 117-136. http://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1630

Cai, J., & Rott, B. (2024). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM - Mathematics Education*, *56*, 61-71. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w

De Vita, M., Verschaffel, L., & Elen, J. (2018). The power of interactive whiteboards for secondary mathematics teaching: Two case studies. *Journal of Educational Technology Systems, 47*(1), 50-78. https://doi.org/10.1177/0047239518767112

Dos Santos, J. M. D. S., Abar, C. A. A. P., & Almeida, M. V. de. (2024). Un estudio colaborativo sobre el desarrollo de recursos de evaluación con feedback automático para la enseñanza de las Matemáticas. *European Public & Social Innovation Review*, *9*, 1-21. https://doi.org/10.31637/epsir-2024-374

Duijzer, C., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Doorman, M., & Leseman, P. (2019). Embodied learning environments for graphing motion: A systematic literature review. *Educational Psychology Review*, *31*, 597-629. https://doi.org/10.1007/s10648-019-09471-7

Günster, S. M., & Weigand, H. G. (2020). Designing digital technology tasks for the development of functional thinking. *ZDM Mathematics Education, 52,* 1259-1274. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01179-1

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). American Mathematical Society.

Herrera, J. G., & García, M. L. (2025). Formulación de conjeturas en el tema de sucesiones. [Entorno virtual interactivo]. Google Forms. https://forms.gle/VsorhKY6Dq346UX98

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). Macmillan Publishing Co, Inc.

Komatsu, K., & Jones, K. (2019). Task design principles for heuristic refutation in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17,* 801-824. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9892-0

López, A., & Meneses, A. (2025). Integración de la tecnología en diseños de una actividad de aprendizaje: estudio de casos. *Enseñanza de las Ciencias, 43*(1), 41-63. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5931

Odifreddi, P. (2006). *La matemática del siglo XX: De los conjuntos a la complejidad* (C. Idiarte, Trad.). Katz Editores.

Rivera, A. (2014). *Cálculo diferencial: fundamentos, aplicaciones y notas históricas*. Grupo Editorial Patria.

Rodríguez, R. (2006). Diseño de entornos para el desarrollo de la autonomía en el aprendizaje. *Aula Abierta, 87,* 89-103.

Roh, K. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics 69*(3), 217-233. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2

Roh, K. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the –strip activity. *Educational Studies in Mathematics 73*(3), 263-279. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9210-4

Sáenz, C. (2001). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. *Actas del Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 45-62). Almería, España.

Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM - Mathematics Education*, 56, 211-222. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8

Sghaier, B., & Vandebrouck, F. (2018). *Teaching and learning continuity with technologies*. INDRUM 2018 Proceedings, pp. 74-83.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Solar-Bezmalinovic, H. (2024). Diseño de situaciones de aprendizaje para matemáticas en un contexto remoto. *Enseñanza de las Ciencias, 42*(1), 161-174. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5870

Solorzano-Movilla, J., & De León, W. (2024). Caracterización del pensamiento matemático avanzado mediante el estudio del principio del palomar. *Pensamiento Americano*, *17*(35), 1-16. https://doi.org/10.21803/penamer.17.35.794

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2018). Addressing key and persistent problems of students' learning: the case of proof. En A. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving* (pp. 99-113). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_7

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ Stud Math 12*, 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. En G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (Vol. 15, pp. 13-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_2

Universidad Nacional Autónoma de México (2005). *Plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas. Facultad de Ciencias*. https://www.fciencias.unam.mx/estudiar-en-ciencias/estudios/licenciaturas/matematicas

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305. https://doi.org/10.1080/0020739830140305

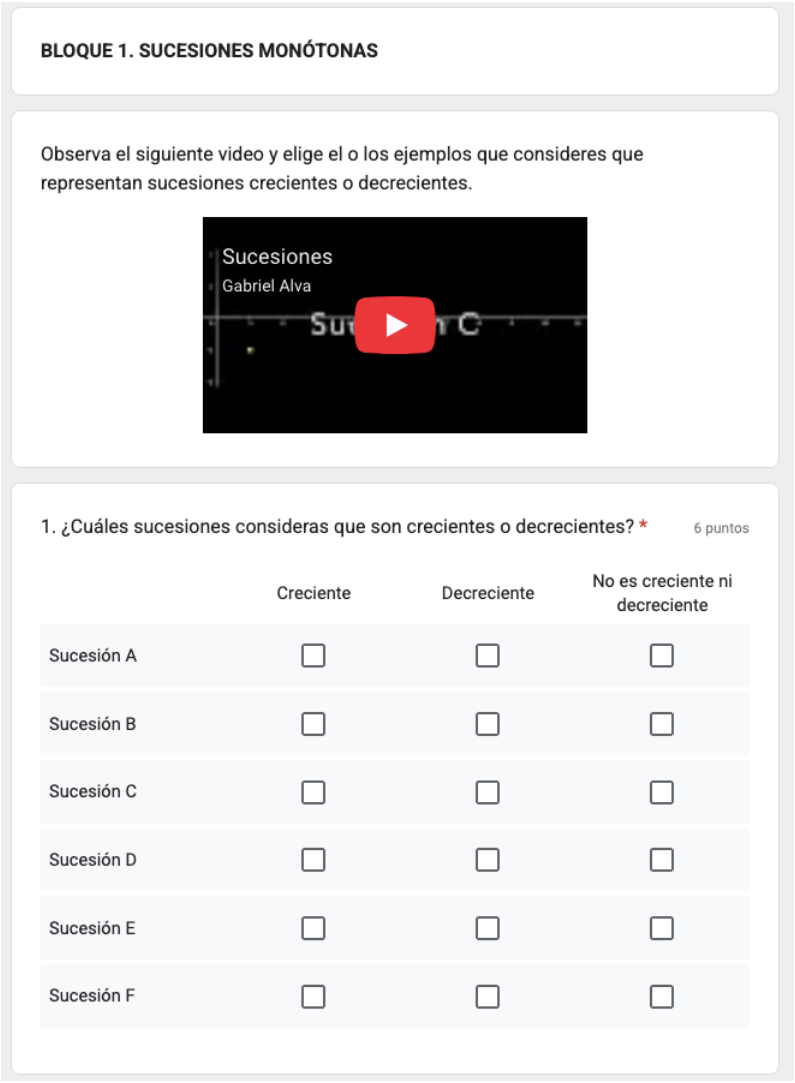
Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Wei, H., Bos, R., & Drijvers, P. (2025). A digital-embodied design for functional thinking in the classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-31. https://doi.org/10.1080/10986065.2025.2493375

Apéndice

Imagen 1

Clasificación de sucesiones crecientes y decrecientes, tarea 1

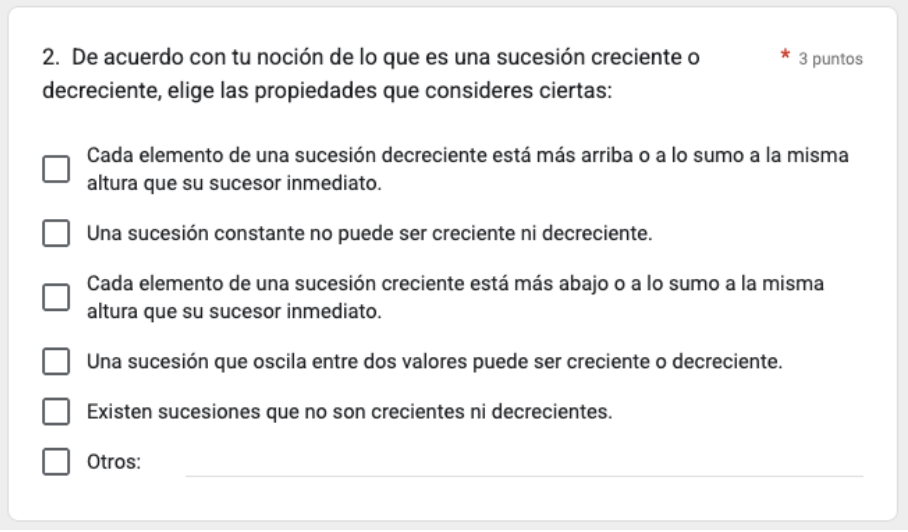


Esta imagen ilustra la tarea 1 en el bloque 1 del entorno virtual interactivo. El estudiante debe observar el video incrustado (tarea 0) que contiene el

comportamiento de seis sucesiones presentadas mediante applets de GeoGebra. Ejemplifica la forma intuitiva de presentar a los estudiantes los conceptos de sucesión monótona. El objetivo de la tarea fue orientar al estudiante para evocar, reorganizar o aportar a lo que conoce sobre los conceptos de sucesión creciente y decreciente (imagen del concepto). Se espera que la consigna de esta tarea lo oriente para clasificar las sucesiones que se presentan en el video.

Imagen 2

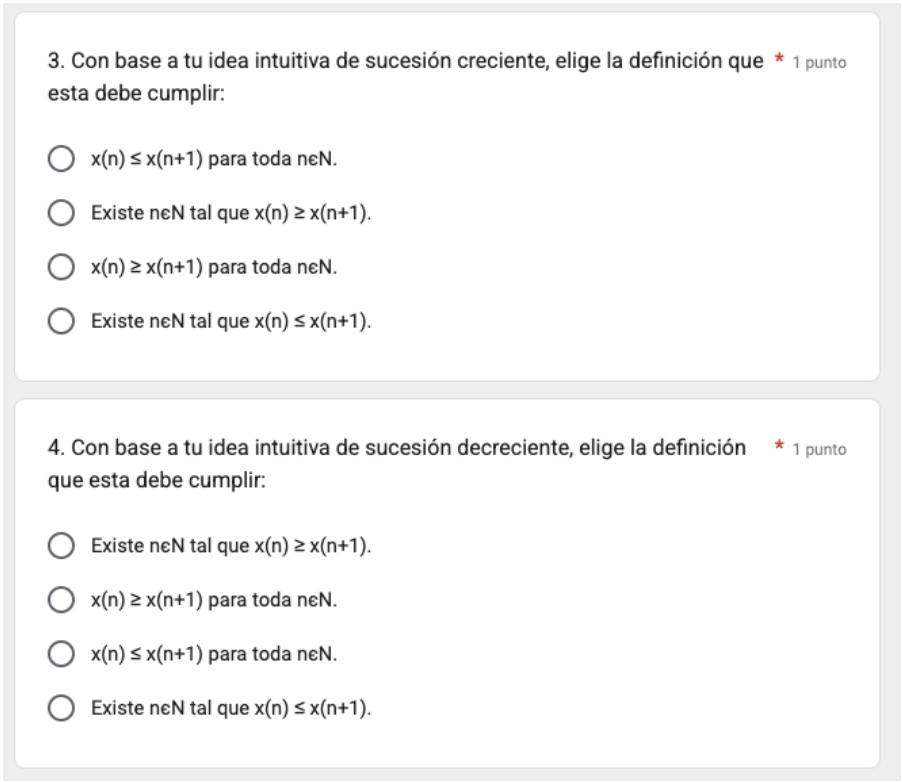
Propiedades de las sucesiones crecientes y decrecientes, tarea 2



Esta imagen ilustra la tarea 2 del bloque 1. El objetivo fue que los estudiantes identificaran las propiedades que cumplen las sucesiones que se presentaron en el video y que tuvieran la opción de reconocer otra propiedad no considerada. Con esta tarea se orientó al estudiante para evocar, reorganizar o aportar a lo que el estudiante conoce sobre las propiedades de las sucesiones monótonas (imagen del concepto). Se espera que la consigna de esta tarea lo familiarice con el vocabulario que se utiliza en las definiciones de sucesión creciente y decreciente.

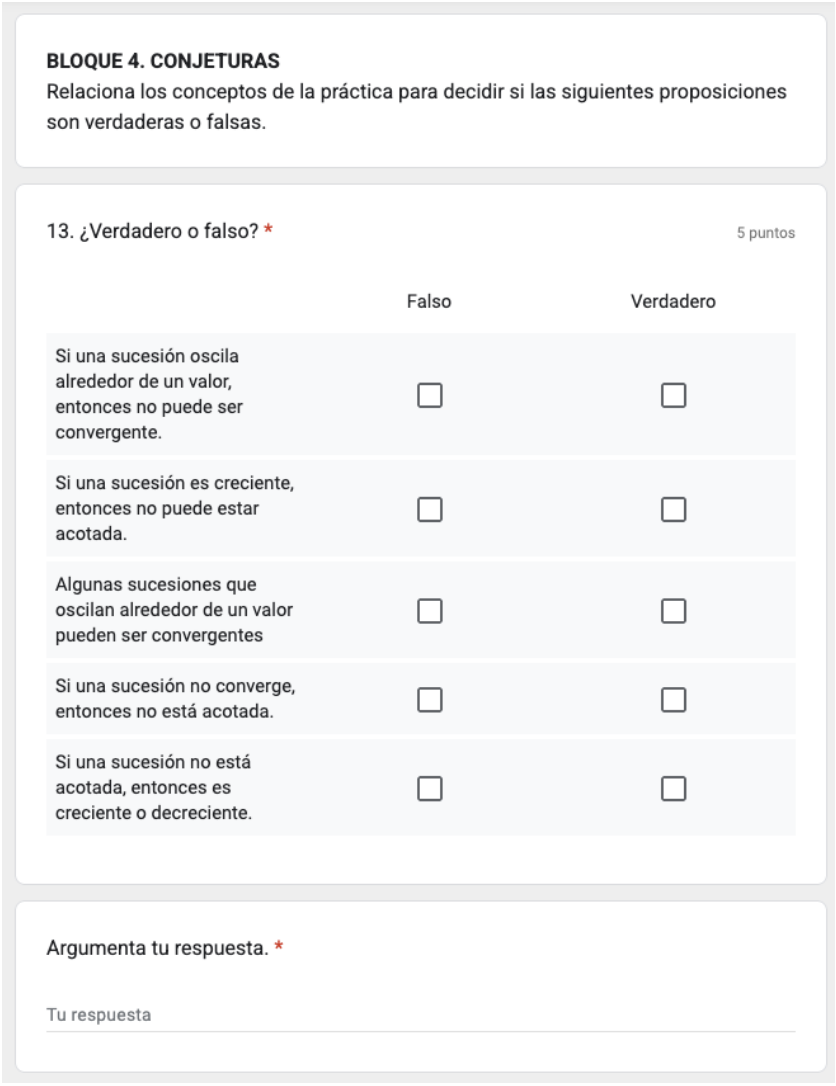
Imagen 3

Formalización de los conceptos de sucesión creciente y decreciente, tareas 3 y 4



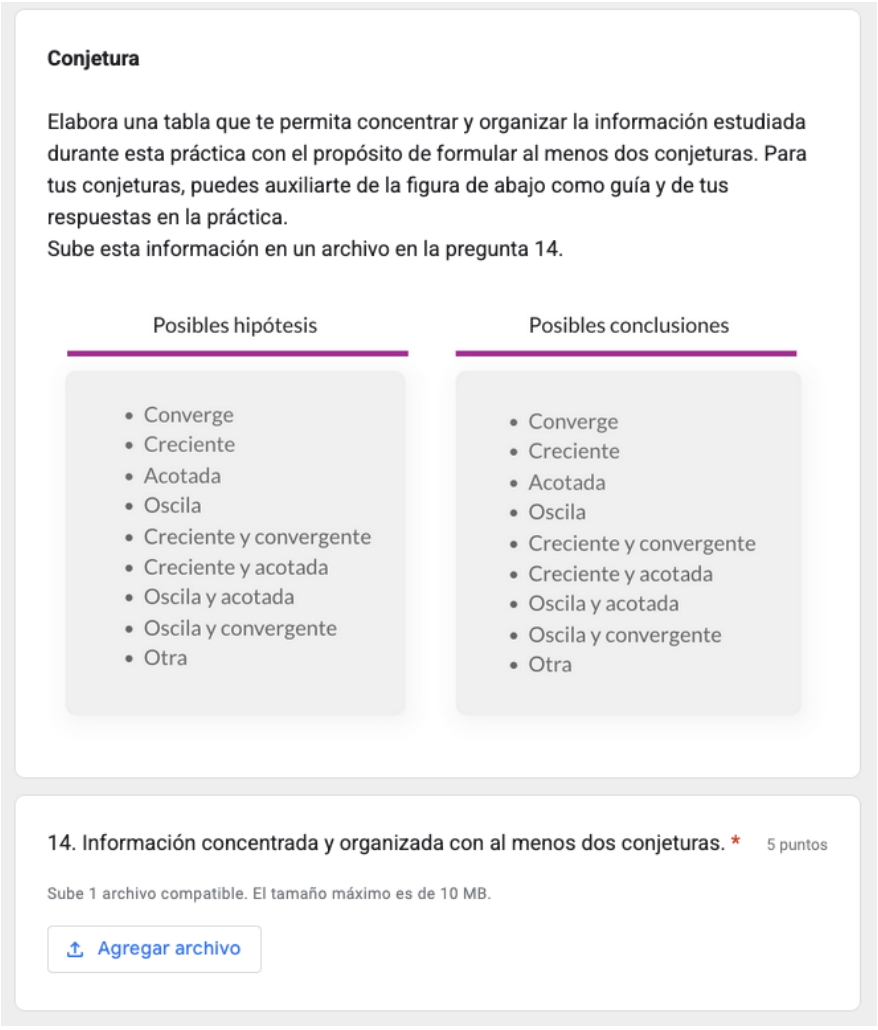
Esta imagen ilustra las tareas 3 y 4 en el bloque 1. El objetivo fue dirigir al estudiante hacia la formalización de los conceptos de sucesión creciente y decreciente, con base en la imagen enriquecida que había logrado en las tareas anteriores.

Imagen 4
Clasificación de conjeturas, tarea 13



Esta imagen ilustra la tarea 13 en el bloque 4. El objetivo fue que, con base en la imagen enriquecida de los conceptos trabajados en las tareas anteriores, los estudiantes clasificaran las conjeturas en falsas o verdaderas y comunicaran las razones de su clasificación.

Imagen 5
Formulación de conjeturas, tarea 14



Esta imagen ilustra la tarea 14 en el bloque 4. El objetivo fue que, con base en la imagen enriquecida de los conceptos trabajados en las tareas anteriores, los estudiantes formularan al menos dos conjeturas, como una evidencia de la relación entre la imagen y la definición de los conceptos que trabajaron a lo largo de los cuatro bloques.